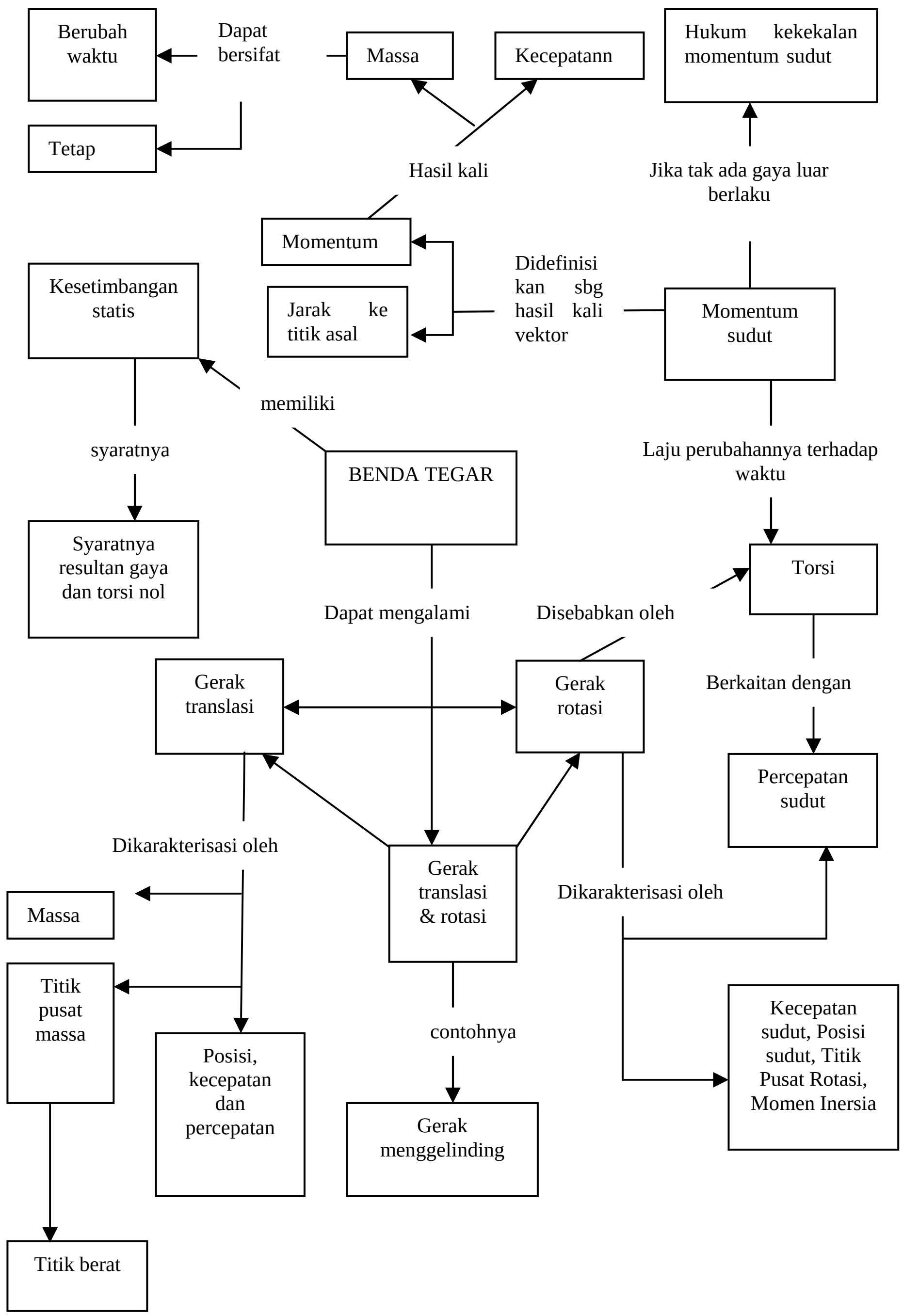
BAB 3
DINAMIKA ROTASI DAN KESETIMBANGAN BENDA TEGAR

Benda tegar adalah benda yang dianggap sesuai dengan dimensi ukuran sesungguhnya di mana jarak antar partikel penyusunnya tetap. Ketika benda tegar mendapatkan gaya luar yang tidak tepat pada pusat massa, maka selain dimungkinkan gerak translasi benda juga bergerak rotasi terhadap sumbu rotasinya. Coba Anda amati pergerakan mainan di salah satu taman hiburan seperti gambar di atas. Para penumpang bisa menikmati putaran yang dilakukan oleh motor penggerak yang terletak di tengah. Karena gerak rotasinya maka para penumpang mempunyai energi kinetik rotasi di samping momentum sudut. Di samping itu pula besaran fisis yang lain juga terkait seperti momen inersia, kecepatan dan percepatan sudut, putaran, serta torsi.

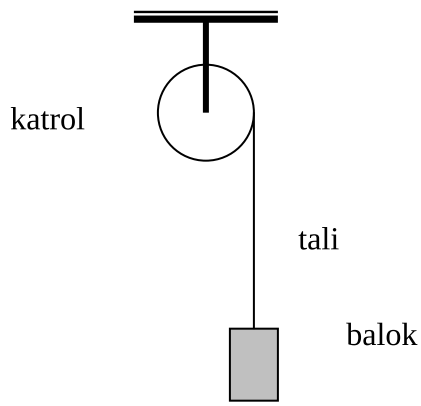
PETA KONSEP


Berubah waktu
Dapat bersifat
Massa
Kecepatann
Hukum kekekalan momentum sudut
Tetap
Hasil kali
Jika tak ada gaya luar berlaku
Momentum
Didefinisikan sbg hasil kali vektor
Kesetimbangan statis
Jarak ke titik asal
Momentum sudut
memiliki
syaratnya
BENDA TEGAR
Laju perubahannya terhadap waktu
Syaratnya resultan gaya dan torsi nol
Torsi
Dapat mengalami
Disebabkan oleh
Gerak translasi
Gerak rotasi
Berkaitan dengan
Percepatan sudut
Dikarakterisasi oleh
Massa
Gerak translasi & rotasi
Dikarakterisasi oleh
Titik pusat massa
Posisi, kecepatan dan percepatan
contohnya
Kecepatan sudut, Posisi sudut, Titik Pusat Rotasi, Momen Inersia
Gerak menggelinding
Titik berat

Cek Kemampuan Prasyarat

Sebelum Anda mempelajari Sub-bab ini, kerjakan terlebih dahulu soal-soal berikut ini di buku latihan Anda. Jika Anda dapat mengerjakan dengan benar, maka akan memudahkan Anda dalam mempelajari materi di Sub-bab berikutnya.

1. Apa yang dimaksud dengan diagram gaya untuk benda bebas?
2. Tuliskannlah bunyi hukum kekekalan energi mekanik.
3. Gambarkanlah diagram gaya untuk benda bebas yang terdiri katrol dan balok berikut:



3.1 Dinamika Rotasi

Seperti yang telah Anda pelajari tentang materi dinamika partikel, di mana suatu benda sebagai obyek pembahasan dianggap sebagai suatu titik materi mengalami gerak translasi (dapat bergerak lurus atau melengkung) jika resultan gaya eksternal yang bekerja pada benda tersebut tidak nol ($\Sigma\vec{F} \neq 0$). Untuk menyelesaikan masalah dinamika partikel, Anda harus menguasai menggambar diagram gaya untuk benda bebas dan kemudian menggunakan Hukum II Newton ($\Sigma\vec{F} = ma$).

Dalam Sub-bab ini Anda akan mempelajari materi ***dinamika rotasi benda tegar***. Benda tegar adalah suatu benda dimana partikel-partikel penyusunnya berjarak tetap antara partikel satu dengan yang lainnya. Benda tegar sebagai objek pembahasan, ukurannya tidak diabaikan (tidak dianggap sebagai satu titik pusat materi), di mana resultan gaya eksternal dapat menyebabkan benda bergerak translasi dan juga rotasi (berputar terhadap suatu poros tertentu). Gerak rotasi disebabkan oleh adanya ***torsi***, τ yaitu tingkat kecenderungan sebuah gaya untuk memutar suatu benda tegar terhadap suatu titik poros.

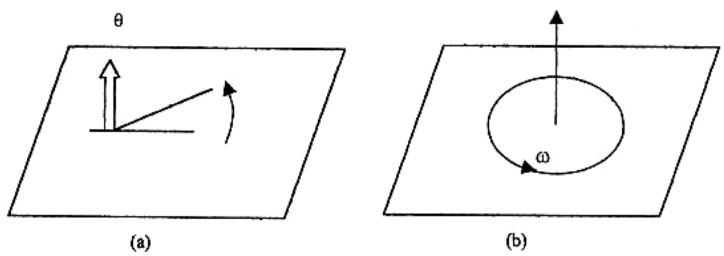
Untuk menyelesaikan masalah dinamika rotasi benda tegar, Anda harus menguasai menggambar diagram gaya benda bebas, kemudian menggunakan $\Sigma\vec{F} = ma$ untuk benda yang bergerak translasi dan menggunakan $\Sigma\tau = I\alpha$ untuk benda yang bergerak rotasi, dengan I (kg.m^2) besaran momen inersia dan α percepatan sudut.

Dalam materi dinamika partikel, Anda telah mempelajari dan menggunakan hukum kekekalan energi mekanik untuk menyelesaikan masalah gerak translasi dan ternyata dapat terelesaikan dengan lebih mudah dan cepat dibanding dengan menggunakan analisa dinamika partikel $\Sigma\vec{F} = ma$. Hal demikian juga berlaku pada pemecahan masalah gerak rotasi tertentu seperti gerak menggelinding (gabungan translasi dan rotasi) benda tegar yang menuruni atau mendaki suatu permukaan bidang miring, dimana penggunaan hukum kekekalan energi mekanik lebih mudah dan cepat dibanding menggunakan analisa dinamika rotasi yang menggunakan persamaan $\Sigma\vec{F} = ma$ dan $\Sigma\tau = I\alpha$.

Sebelum materi dinamika rotasi, Anda telah mempelajari hukum kekekalan momentum linier. Dalam Sub-bab ini Anda akan diperkenalkan dengan materi hukum kekekalan momentum sudut. Contoh aplikasi hukum ini ditemui pada pada atlit penari es yang melaukan peningkatan laju putarannya dengan cara menarik kedua lengannya dari terentang ke merapat badannya.

3.2. Kecepatan dan Percepatan Angular

Dalam membahas materi tentang gerak rotasi Anda harus terlebih dahulu mempelajari besaran fisis gerak rotasi yaitu pergeseran sudut, kecepatan sudut dan percepatan sudut. Besaran pergeseran sudut, kecepatan sudut dan percepatan sudut selalu dinyatakan dalam bentuk vektor, masing-masing dilambangkan dengan $\overline{\theta}, \overline{\varpi}\ \ dan\ \overline{\alpha}$. Arah pergeseran sudut adalah positif bila gerak rotasi (melingkar atau berputar) berlawanan dengan arah putaran jarum jam, sedangkan arah vektornya (seperti ditunjukkan dalam Gambar 3.1) sejajar dengan sumbu rotasi (sumbu putar) yaitu arah maju sekrup putar kanan.



Gambar 3.1 (a) arah $\overline{\theta}$ tegak lurus bidang (b) arah $\overline{\omega}$ sejajar dengan sumbu putar

Kecepatan sudut didefinisikan sebagai perbandingan pergeseran sudut dengan waktu tempuh dengan arah kecepatan sudut searah dengan pergeseran sudut atau searah dengan sumbu putar yaitu:

$$\overline{\varpi} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \qquad (3.1)$$

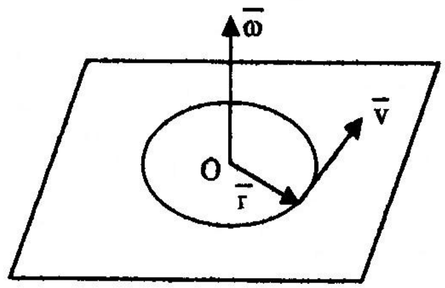
Sedangkan *percepatan sudut* $\overline{\alpha}$ didefinisikan sebagai perbandingan kecepatan sudut dengan waktu tempuh yang dinyatakan sebagai:

$$\overline{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \qquad (3.2)$$

dengan θ: pergeseran sudut, radian (rad), t: waktu, sekon (s), ω: kecepatan sudut (rad/s), α: percepatan sudut, (rad/s^2).

Dari persamaan (3.2) terlihat bahwa percepatan sudut $\overline{\alpha}$ bergantung pada perubahan arah kecepatan sudut $\overline{\varpi}$ (kalau sumbu putar arahnya berubah) dan bergantung pada perubahan besar kecepatan sudut $\overline{\varpi}$.

Dalam gerak melingkar yang jari-jarinya r dan kecepatan sudutnya $\overline{\varpi}$, besar kecepatan linier benda adalah $v = \omega r$, sedang arahnya sama dengan arah garis singgung pada lingkaran di titik dimana benda berada. Kecepatan linier benda dinyatakan sebagai $\overline{v} = \overline{\varpi}\ x\ \overline{r}$, yang menunjukkan bahwa arah $\overline{v}$ tegak lurus baik terhadap $\overline{\varpi}$ maupun $\overline{r}$, yaitu searah dengan arah maju sekrup putar kanan bila diputar dari $\overline{\varpi}$ ke $\overline{r}$ seperti ditunjukkan dalam Gambar 3.2.



Gambar 3.2. Benda terletak pada posisi $\bar{r}$ brgerak melingkar dengan kecepatan sudut $\bar{\omega}$

Sehingga persamaan gerak melingkar :

$$\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Persamaan kecepatan gerak melingkar

$$\omega = \omega_o + \alpha t$$

<u>Contoh soal 1</u>

Sebuah cakram berputar dengan percepatan sudut konstan 2 rad/s^2. Jika cakram mulai dari keadaan diam berapa putaran dan kelajuan sudutnya setelah 10 s?

Penyelesaian:

Cakram melakukan gerak melingkar berubah beraturan dengan percepatan konstan, maka sudut tempuh yang dilakukan dihitung dengan:

$$\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \frac{1}{2}(2rad/s^2)(10s)^2 = 100rad$$

jumlah putaran yang dilakukan cakram adalah

$$100radx \frac{1putaran}{2\pi rad} = 15{,}9\, putaran$$

Sedangkan kecepatan sudut yang dilakukan cakram dihitung dengan:

$$\omega = \omega_o + \alpha t = 0 + (2rad/s^2)(10s) = 20rad/s^2$$

<u>Kegiatan 1</u>. *Menghitung kecepatan sudut dan kecepatan linier*.

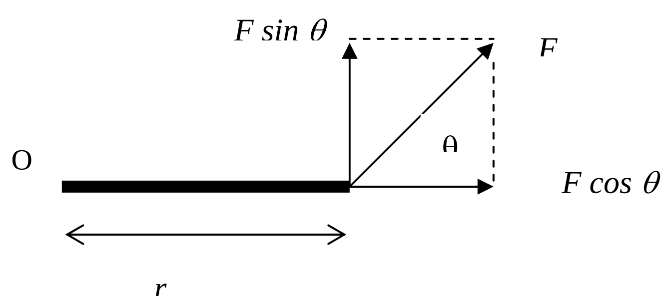
1. Ambil sepeda angin dan posisikan agar roda belakang dapat berputar dengan baik.
2. Ukur dan catat radius roda,
3. Beri tanda pada "pentil" sebagai acuan obyek pengamatan,
4. Putar roda dan pastikan "pentil" berputar sejauh setengah putaran (180^o) dan catat waktu yang diperlukan dengan menggunakan stop wacth,
5. Tentukan kecepatan sudut dari pentil tersebut,
6. Tentukan kecepatan linier dari pentil yang dianggap berada pada tepian roda.

<u>Tugas 1</u>.

Sebuah gerinda dengan radius 15 cm diputar dari keadaan diam dengan percepatan sudut 2 rad/s^2. Jika gerinda berputar selama 10 sekon, tentukan kecepatan sudutnya, kecepatan linier titik di tepi gerinda, berapa jumlah putaran yang ditempuh gerinda tersebut?

3.3. Torsi dan Momen Inersia

Bila Anda ingin memutar permainan gasing, Anda harus memuntirnya terlebih dahulu. Pada kasus itu yang menyebabkan gasing berotasi adalah *torsi*. Untuk memahami torsi dalam gerak rotasi, Anda tinjau gambar batang langsing yang diberi poros di salah satu ujungnya (titik O) dan diberikan gaya F yang membentuk sudut θ terhadap horizontal seperti yang ditunjukkan Gambar 3.3.



Gambar 3.3. Batang langsing yang diputar oleh F terhadap titik poros O

Gaya F mempunyai komponen ke arah horizontal, $F\cos\theta$ dan arah vertikal $F\sin\theta$ sedangkan jarak tegak lurus antara garis kerja sebuah gaya dengan sumbu rotasi disebut *lengan*, *r*. Dari kedua komponen gaya tersebut yang dapat menyebabkan batang langsing berotasi terhadap titik poros rotasi adalah komponen gaya $F\sin\theta$, karena komponen gaya ini yang menimbulkan torsi pada batang sehingga batang langsing dapat berputar berlawanan dengan arah putaran jarum jam sedangkan komponen gaya $F\cos\theta$ tidak menyebabkan torsi pada batang langsing.

Hasil kali sebuah gaya dengan lengannya dinamakan ***torsi, τ***

$$\vec{\tau} = \vec{r} x \vec{F} = rF\sin\theta$$

dengan θ sudut antara lengan gaya dengan garis kerja gaya dan arah torsi searah sekrup diputar kanan.

Dari hukum ke dua Newton untuk massa yang konstan dapat ditulis:

$$\overline{F} = m\,\overline{a} \tag{3.3}$$

Jika kedua ruas persamaan (3.3) ini dikalikan secara silang dengan $\overline{r}$, diperoleh

$$\overline{r}\; x\overline{F} = \overline{r}\; xm\vec{\alpha}r$$

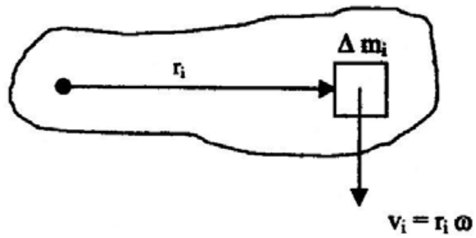
$$\vec{\tau} = mr^2\vec{\alpha} = I\vec{\alpha} \tag{3.4}$$

Besaran skalar dalam persamaan (3.4) didefinisikan sebagai bersaran *momen inersia I*, untuk benda tegar yang tersusun dari banyak partikel dengan masing-masing massa m_1, m_2, m_3, ..., m_N dan berjarak tegak lurus terhadap titik poros masing-masing r_1, r_2, r_3, ..., r_N maka momen inersia sistem partikel tersebut adalah:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \tag{3.5}$$

Bila suatu benda tegar seperti pada Gambar 3.4 berputar terhadap sumbu yang tegak lurus bidang gambar melalui titik O, dengan memandang bahwa benda tegar tersebut tersusun dari jumlahan elemen kecil massa Δm_i , maka momen inersia dalam persamaan (3.5) dapat ditulis sebagai berikut:

$$I = \sum_{i=1}^{N} r_i^{\,2} \Delta m_i \qquad (3.6)$$



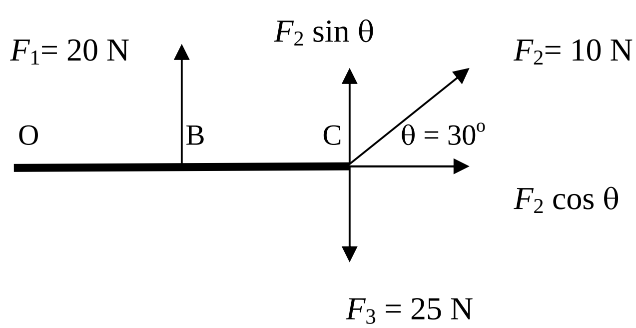
Gambar 3.4 Benda tegar dengan distribusi massa kontinu yang berputar terhadap titik o

Apabila elemen massa Δm_i diambil sangat kecil ($\Delta m_i \rightarrow 0$), maka bentuk jumlahan dalam persamaan (3.6) dapat diganti dengan bentuk intergral, jadi momen inersianya adalah:

$$I = \sum_{i} r_i^2 \Delta m_i \qquad (3.7)$$

dengan *r* adalah jarak elemen massa *dm* terhadap sumbu putar.

Contoh soal 3.2.
Sebuah batang langsing 1 meter dikenai tiga gaya seperti gambar, bila poros terletak di salah satu ujung O, tentukan torsi total yang dilakukan oleh ketiga gaya tersebut pada batang langsing terhadap poros O.



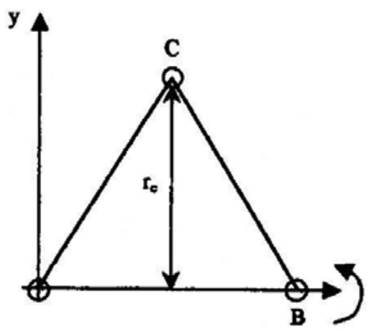
Penyelesaian:

Gaya (N)	**Lengan torsi (m)**	**Torsi (mN)**	**Arah torsi**
F_1=20 F_2 cos θ F_2 sin 30^o = 5 F_3 = 25	OB = 0,5 0 OC = 1 OC = 1	0,5 x 20 = 10 0 1 x 5 = 5 (-1) x 25 = -25	Berlawanan arah jarum jam - berlawanan arah jarum jam searah jarum jam

Jadi momen inersia terhadap poros O adalah (10) + (5) + (-25) = -10 (mN). Tanda negatif menunjukkan arah torsi total berlawanan arah jarum jam.

Contoh soal 3.3.

Tiga benda kecil massanya masing-masing 0,1 kg, 0,2 kg dan 0,3 kg, diletakkan berturut-turut pada titik A (0,0) m, B (4,0) m dan C (2,3) m seperti pada Gambar dan dihubungkan dengan batang tegar yang massanya diabaikan. Berapakah momen inersia sistem ini bila diputar terhadap sumbu X ?



Penyelesaian:

Ketiga benda terletak secara diskrit,

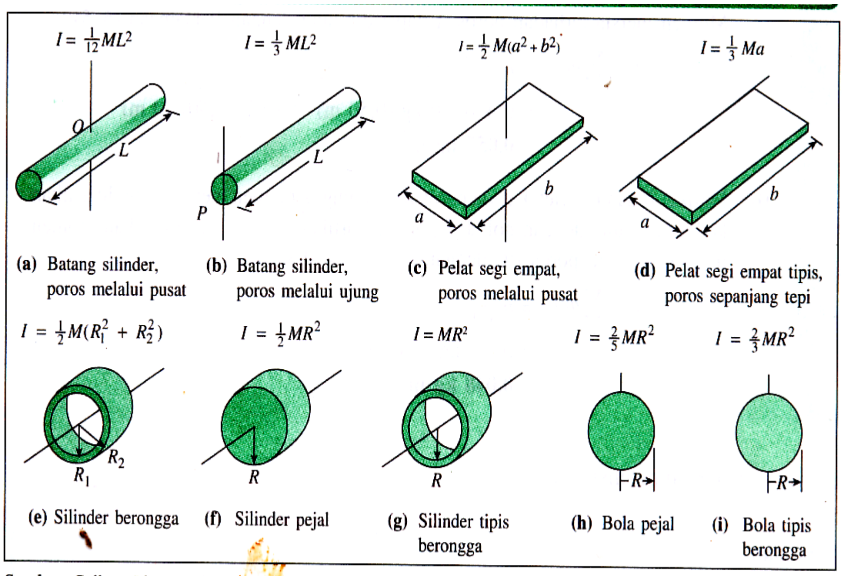
momen inersia:

$$I = m_A r_A^2 + m_B\ r_B^2 + m_C\ r_C^2$$

Mengingat benda A dan B terletak sepanjang sumbu rotasi, maka r_A dan r_B sama dengan nol, sehingga

I = m_C r_C^2 = (0,3 kg) (3m)^2 = 2,7 kg m^2.

Tabel 3.1. Momen inersia benda-benda yang sering dikenal



Sumber: *College Physics, Serway R.A, Faughn J.S.*

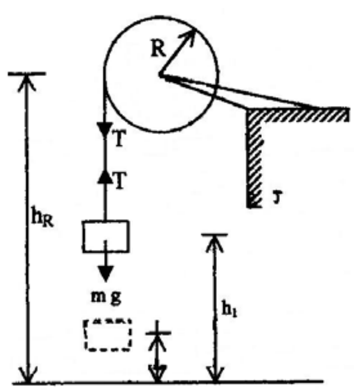
3.3. Pemecahan Masalah Dinamika Rotasi

Untuk memecahkan persoalan dinamika rotasi, apabila di dalamnya terdapat bagian sistem yang bergerak translasi maka pemecahannya dapat dilakukan dengan mengambil langkah-langkah sebagai berikut:

1. Identifikasi benda bagian dari sistem sebagai obyek pembahasan dan kelompokkan mana yang bergerak translasi dan yang rotasi.
2. Tentukan sumbu koordinat yang memudahkan untuk penyelesaian berikutnya.
3. Gambar diagram gaya benda bebas untuk masing-masing benda.
4. Gunakan persamaan $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ untuk translasi dan $\Sigma\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ untuk gerak rotasi.
5. Padukan dua persamaan pada langkah 4 untuk penyelesaian akhir.

Untuk memahami penyelesaian dengan urutan langkah tersebut di atas, silakan Anda mengimplementasikan pada studi kasus dinamika rotasi berikut ini:

Contoh soal 3.4.
Benda *A* massa *m* (kg) dihubungkan dengan tali pada sebuah roda putar berjari-jari *R* dan bermassa *M* (kg) seperti Gambar . Bila mula-mula benda *A* diam pada ketinggian h_1 (m) kemudian dilepas sampai pada ketinggian h_2 (m), tentukan tegangan tali dan percepatan linier benda *A* sepanjang geraknya.



Penyelesaian :

<u>Analisa rotasi:</u>

Setelah benda A dilepas roda (bagian sistem yang berotasi) berputar dengan percepatan sudut α, dalam hal ini gaya penggerak rotasinya adalah gaya tegangan tali *T*. Dari hukum kedua Newton untuk gerak rotasi $\overline{\tau} = I\,\overline{\alpha}$ dan definisi momen inersia roda terhadap sumbunya I = $\frac{1}{2}MR^2$, diperoleh $\overline{T} x \overline{R} = \frac{1}{2}MR^2\,\overline{\alpha}$

Karena *T* tegak lurus *R*, maka bila ditulis dalam bentuk skalar menjadi

$$TR \sin 90^0 = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

<u>Analisis translasi:</u>

Benda A merupakan bagian system yang bertranslasi, percepatan linier benda A sama dengan percepatan linier roda, yaitu $a = \alpha R$, sehingga gaya tegangan tali dapat dinyatakan dalam:

$$T = \frac{1}{2}Ma$$

Sepanjang gerakan benda A berlaku hukum ke dua Newton :

$$mg - T = ma$$

Sehingga dengan memasukkan harga *T,* maka besaran percepatan linier benda *A*, percepatan sudut roda dan gaya tegangan tali berturut-turut dapat dinyatakan sebagai

$$a = \frac{2m}{M + 2m} g$$

$$\alpha = \frac{2m}{M + 2m} \frac{g}{R}$$

$$T = \frac{M}{M + 2m} mg$$

Kegiatan 2. *Menghitung percepatan linier dan sudut, tegangan tali.*

1. Ambil katrol dan tali, susunlah membentuk system mekanik dimana di kedua ujung tali diberi dua ember yang sama,
2. Isi masing-masing ember dengan air, 2 kg dan 4 kg,
3. Posisikan system awalnya diam setimbang dengan posisi kedua ember sama tinggi,
4. Dari keadaan setimbang, kedua ember dilepas,
5. Ukur radius katrol, massa katrol dan hitung momen inersianya,
6. Dengan stop watch, catat waktu yang dibutuhkan ketika salah satu ember menempuh 50 cm,
7. Dengan analisa kinematika translasi dan rotasi, hitung percepatan linier ember, tegangan tali dan percepatan sudut katrol.

Tugas 2.

Seorang siswa mengamati seorang pekerja bangunan yang sedang mengangkat benda balok 40 kg ke atas lantai 2 setinggi 3 m dari lantai dasar dengan menggunakan “krane” /sistem katrol. Jika radius katrol 25 cm dan benda sampai di lantai 2 dalam waktu 3 sekon, hitung percepatan sudut katrol dan tegangan tali. Percepatan benda bergerak ke atas 1 m/s.

3.4. Pemecahan Masalah Dinamika Rotasi dengan Hukum Kekekalan Energi Mekanik

Anda telah mencoba mengimplementasikan pemecahan masalah dinamika rotasi dengan menggunakan hukum II Newton $\Sigma F = ma$ dan $\Sigma \tau = I\alpha$. Perlu Anda ingat pula bahwa masalah dinamika translasi dapat juga diselesaikan secara mudah dan cepat dengan hukum kekekalan energi mekanik, demikian juga secara analogi masalah dinamika rotasi dapat juga diselesaikan dengan menggunakan hukum kekekalan energi mekanik. Pada bagian ini kita akan mempelajari cara pemecahan masalah dinamika rotasi berupa gerak menggelinding dengan menggunakan hukum kekekalan energi mekanik.

Gerak menggelinding adalah suatu gerak dari benda tegar yang melakukan gerak translasi sekaligus melakukan gerak rotasi. Benda tegar yang melakukan gerak menggelinding maka selama gerakan berlaku hukum kekekalan energi mekanik, yang diformulasikan sebagai berikut:

$$E_M\,(mekanik) = E_P\,(potensial) + E_K\,(translasi) + E_K\,(rotasi)$$

$$E_M = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (3.8)$$

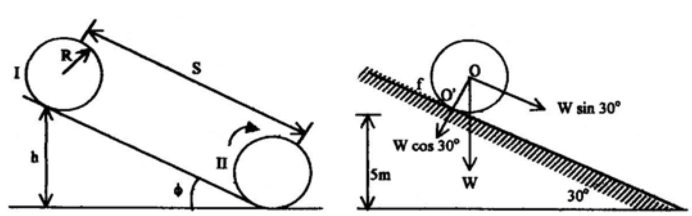
Energi kinetik translasi dihitung berdasarkan asumsi bahwa benda adalah suatu partikel yang kelajuan liniernya sama dengan kelajuan pusat massa sedangkan energi kinetik rotasi dihitung berdasarkan asumsi bahwa benda tegar berotasi terhadap poros yang melewati pusat massa.

Sekarang Anda implementasikan pada masalah gerak menggelinding dari silinder pejal pada lintasan miring dengan dua cara sekaligus berikut ini:

<u>Contoh soal 3.4.</u>

Sebuah silinder pejal bermassa M dan berjari-jari R diletakkan pada bidang miring dengan kemiringan θ terhadap bidang horisontal yang mempunyai kekasaran tertentu. Setelah dilepas silinder tersebut menggelinding, tentukan kecepatan silinder setelah sampai di kaki bidang miring!

<u>Cara penyelesaiannya:</u>



Persoalan ini dapat diselesaikan menggunakan konsep dinamika atau menggunakan hukum kekekalan tenaga mekanik.

a. *Penyelesaian secara dinamika*

Silinder menggelinding karena bidang miring mempunyai tingkat kekasaran tertentu. Momen gaya terhadap sumbu putar yang menyebabkan silinder berotasi dengan percepatan sudut α ditimbulkan oleh gaya gesek *f*, yang dapat ditentukan melalui

$$fR = I\alpha$$

karena momen inersia silinder terhadap sumbunya adalah $I = \frac{1}{2}MR^2$ dan percepatan linier $a = \alpha R$, maka gaya gesek dapat dinyatakan sebagai

$$f = \frac{1}{2}Ma$$

Pada gerak menggelinding tersebut pusat massa silinder bergerak translasi, sehingga berlaku hukum kedua Newton.

$$Mg\sin\theta - f = Ma$$

Setelah memasukkan harga *f* di atas dapat diketahui percepatan linier silinder, yaitu $a = \frac{2}{3}g\sin\theta$

Dengan menggunakan hubungan $v^2 = v_0^2 + 2as$, dan mengingat kecepatan silinder saat terlepas $v_o = 0$ dan $h = s\sin\theta$, maka kecepatan silinder setelah sampai di ujung kaki bidang adalah:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

Terlihat bahwa kecepatan benda *menggelinding lebih lambat* daripada bila benda tersebut *tergelincir* (meluncur) tanpa gesekan yang kecepatannya:

$$v = \sqrt{2gh}$$

b. <u>*Penyelesaian menggunakan kekekalan tenaga mekanik*</u>

Pada gerak menggelinding berlaku hukum kekekalan tenaga mekanik, tenaga mekanik silinder pada kedudukan 1 adalah:

$$E_I = E_{pI} = Mg\,(h + R)$$

Sedangkan tenaga mekanik silinder pada kedudukan 2 adalah:

$$E_2 = E_{p2} + E_{k2} + E_{kR2}$$

$$= MgR + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\varpi^2$$

Perubahan tenaga mekanik yang terjadi adalah

$$W_f = \Delta E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\varpi^2 - Mgh$$

Karena $W_f = 0$, maka dengan memasukkan momen inersia silinder $I = \frac{1}{2}MR^2$ dan $\varpi = \frac{v}{R}$, kecepatan silinder setelah sampai di ujung kaki bidang miring besarnya adalah: $v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$

Kegiatan 3. *Menerapkan hukum kekelan energi mekani*k

1. Silakan ambil sebuah bola sepak dan ukur radius beserta massanya,
2. Tempatkan bola pada puncak sebuah papan kayu yang miring (kemiringan 53^o terhadap horizontal),
3. Lepaskan bola dari puncak (awalnya diam),
4. Catat waktu yang dibutuhkan bola dari posisi awal hingga dasar,
5. Jika papan kasar, hitung kecepatan linier dan kecepatan sudut dari bola ketika mencapai dasar dengan menggunakan analisa kinematika dan kekekalan energi mekanik.

Tugas 3.

Berapakah kecepatan linier bola pejal beradius 15 cm , massanya 2 kg jika dilepas pada bidang miring licin dengan kemiringan 53^o terhadap horizontal. Bola dilepas dari ketinggian 4 m.

3.5. Hukum Kekekalan Momentum Sudut

Pada gerak rotasi, benda mempunyai besaran yang dinamakan momentum sudut yang analog pada gerak translasi yang terdapat besaran momentum linier. *Momentum sudut*, *L*, merupakan besaran vektor dengan besar berupa hasil kali momen inersia, *I*, dengan kecepatan sudut ω, yang diformulasikan sebagai berikut:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad (3.9)$$

Bila momen gaya eksternal resultan yang bekerja pada suatu benda tegar sama dengan nol, maka momentum sudut total sistem tetap. Prinsip ini dikenal sebagai prinsip *kekekalan momentum sudut*.
Tinjau suatu benda tegar berotasi mengelilingi sumbu z yang tetap, momentum sudut benda tersebut adalah

$$\overline{L}_Z = I\overline{\varpi}$$

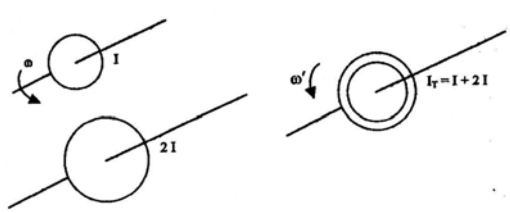
dengan *I* adalah momen inersia benda, sedangkan ω adalah kecepatan sudutnya. Bila tak ada momen gaya eksternal yang bekerja, maka L_Z tetap, sehingga bila *I* berubah maka ω harus berubah agar efek perubahannya saling meniadakan. Kekekalan momentum sudut akan berbentuk:

$$I\,\omega = I_o\omega_o \qquad (3.10)$$

dengan I_o dan ω_o adalah momen inersia benda dan kecepatan sudut mula-mula. Prinsip ini sering dipakai oleh penari balet atau peloncat indah untuk dapat berputar lebih cepat, yaitu dengan mengatur rentangan tangan maupun kakinya.

Contoh soal 3.5.
Roda pertama berputar pada as (sumbu) dengan kecepatan sudut 810 putaran/menit. Roda kedua mula-mula diam, momen inersianya 2 kali momen inersia roda pertama. Bila roda ke dua tiba-tiba digabungkan sesumbu dengan roda pertama, seperti ditunjukkan pada Gambar.
a. berapakah kecepatan sudut dari gabungan ke dua roda?
b. berapakah besarnya tenaga kinetik yang hilang?

Penyelesaian :



a. Karena digabungkan sesumbu, kedua roda bergerak dengan kecepatan sudut yang sama, dan pada gerak rotasi gabungan tersebut tidak ada momen gaya luar yang bekerja, sehingga berlaku hukum kekekalan momentum sudut.

Momentum sudut awal = momentum sudut akhir

Misal kecepatan sudut roda pertama mula-mula ω dan kecepatan sudut gabungan kedua roda adalah ω' , maka

$$I\omega = 3I\omega' \rightarrow \omega' = \frac{\varpi}{3}$$

Karena frekuensi putaran roda pertama 810 putaran/menit, maka kecepatan sudut gabungan kedua roda tersebut adalah $\omega' = 2\pi \cdot \frac{810}{3} \, rad/menit$

b. Tenaga kinetik rotasi gabungan

$$E_{k^1} = \frac{1}{2} I_T \varpi'^2$$

$$= \frac{3}{2} I \left(\frac{1}{3} \varpi \right)^2 = \frac{1}{6} I \varpi^2$$

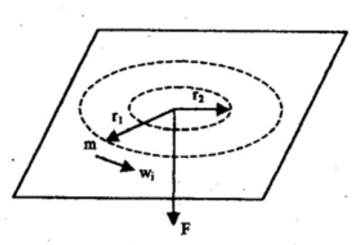
dengan I_T adalah momen inersia gabungan kedua roda, sehingga tenaga kinetik rotasi yang hilang adalah

$$\frac{1}{2} I \varpi^2 - \frac{1}{6} I \varpi^2 = \frac{2}{3} I \varpi^2$$

yaitu 2/3 dari tenaga kinetik rotasi pertama sebelum digabung.

<u>Contoh soal 3.6</u>

Sebuah benda kecil bermassa m diikatkan diujung tali. Tali diputar hingga bergerak melingkar pada bidang horizontal dengan jari-jari r_1 dan laju v_1. Kemudian tali ditarik ke bawah sehingga lingkarannya menjadi r_2 (dengan $r_2 < r_1$). Nyatakan laju v_2 dan laju putaran ω_2 terhadap harga mula-mula v_1 dan ω_1*!*



<u>Penyelesaian</u> :
Pada saat tangan menarik tali ke bawah, gaya penariknya (*F)* berimpit dengan sumbu putar massa m, sehingga gaya ini tidak menyebabkan momen gaya. Karenanya pada kasus ini berlaku hukum kekekalan momentum sudut

$$L_1 = L_2$$
$$mv_1r_1 = mv_2r_2$$

jadi laju v_2 adalah $v_2 = \dfrac{r_1}{r_2}v_1$. Dalam bentuk laju putaran, hukum kekekalan momentum dapat dinyatakan sebagai $mr_1^2\varpi_1 = mr_2^2\varpi_2$, jadi laju putaran ω_2 adalah $\varpi_2 = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2\varpi_1$.

3.6 Kesetimbangan Benda

Dalam subbab ini Anda akan dipelajari kesetimbangan benda tegar. Kesetimbangan ada dua yaitu kesetimbangan statis (benda dalam keadaan tetap diam) dan kesetimbangan kinetis (benda dalam keadaan bergerak lurus beraturan). Benda dalam keadaan kesetimbangan apabila padanya berlaku $\Sigma\vec{F} = 0$ (tidak bergerak translasi) dan $\Sigma\tau = 0$ (tidak berotasi). Berikutnya dalam subbab ini apabila tidak dinyatakan, yang dimaksud kesetimbangan adalah kestimbangan statis (benda tetap diam) dan supaya mempermudah dalam menyelesaikan masalah kestimbangan, Anda harus menguasai menggambar diagram gaya benda bebas dan menghitung torsi terhadap suatu poros oleh setiap gaya dari diagram gaya benda bebas tersebut.

A. Kesetimbangan Statis Sistem Partikel

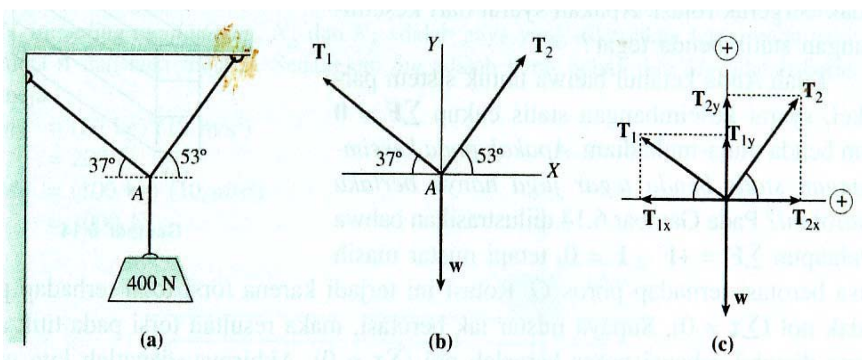
Dalam system yang tersusun dari partikel, benda dianggap sebagai satu titik materi. Semua gaya eksternal yang bekerja pada system tersebut dianggap bekerja pada titik materi tersebut sehingga gaya tersebut hanya menyebabkan gerak translasi dan tidak menyebabkan gerak rotasi. Oleh karena itu kesetimbangan yang berlaku pada sistem partikel hanyalah kesetimbangan translasi.
Syarat kesetimbangan partikel adalah:

$\Sigma\vec{F} = 0$ yang meliputi $\Sigma F_x = 0$ dan $\Sigma F_y = 0$ (3.11)

dengan ΣF_x : resultan gaya pada komponen sumbu x

ΣF_y : resultan gaya pada komponen sumbu y.

Untuk memahami masalah kesetimbangan sistem partikel, silahkan pelajari studi kasus kesetimbangan berikut:
Benda dengan berat 400 N digantung pada keadaan diam oleh tali-tali seperti pada Gambar 3.5. Tentukan besar tegangan-tegangan pada kedua tali penahannya.



Gambar 3.5. Sistem kesetimbangan partikel.

<u>Penyelesaian:</u>
Dari gambar (c), diperoleh komponen tegangan tali sebagai berikut:

$T_{1x} = T_1 \cos 37^o = 0{,}8T_1$ $\quad$ $T_{2x} = T_2 \cos 53^o = 0{,}6T_2$

$T_{1y} = T_1 \sin 37^o = 0{,}6T_1$ $\quad$ $T_{2y} = T_2 \sin 53^o = 0{,}8T_2$

Berikutnya kita menggunakan persamaan kesetimbangan statis partikel dan perhatikan tanda *positif* untuk arah ke kanan atau atas dan *negatif* untuk arah ke kiri atau bawah.

$\Sigma F_x = 0$ $\quad$ $\Sigma F_y = 0$

$T_{2x} - T_{1x} = 0$ $\quad$ $T_{1y} + T_{2y} - W = 0$

$0{,}6T_2 = 0{,}8T_1$ (1) $\quad$ $0{,}6T_1 + 0{,}8T_2 - 400 = 0$ (2)

Dengan mensubstitusi nilai T_2 dari persamaan (1) ke persamaan (2) kita dapat nilai tegangan tali T_2 = 320 N dan dengan mensubstitusi ke persamaan (1) diperoleh nilai tegangan tali T_1 = 240 N.

B. Kesetimbangan Benda Tegar

Suatu benda tegar yang terletak pada bidang datar (bidang XY) berada dalam keadaan kesetimbangan statis bila memenuhi syarat:

1. Resultan gaya harus nol

   $\Sigma F = 0$ yang mencakup $\Sigma F_x = 0$ dan $\Sigma F_y = 0$
2. Resultan torsi harus nol

   $\Sigma\tau = 0$

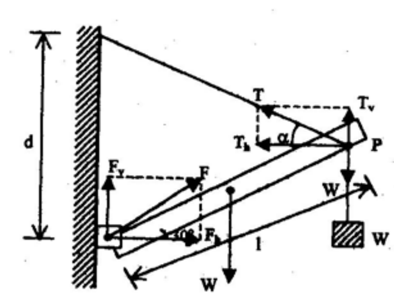
Untuk memahami masalah kesetimbangan benda tegar, tinjau pemecahan studi kasus berikut ini:

Contoh soal 3.7

Sebuah batang homogen dipasang melalui engsel pada dinding. Pada jarak d = 2 m diatas engsel diikatkan kawat yang ujung lainnya dihubungkan dengan ujung batang. Batang membentuk sudut 30^0 terhadap horisontal, dan pada ujung batang digantungkan beban berat W_2 = 40 N melalui sebuah tali. Jika berat batang adalah W_1 = 60 N dan panjang batang adalah 1 = 3 m, tentukan gaya tegangan dalam kawat dan gaya yang dilakukan engsel pada batang!

Penyelesaian:

Penguraian gaya yang bekerja pada sistem ditunjukkan pada Gambar.



Dari syarat seimbang $\sum \overline{F}$ ... nen vertikal dan horisontalnya b...

$\sum \overline{F_v} = 0$: F_v + ...

$$T_v + F_v = W + w = 100\ N \qquad (a)$$

$$\sum F_h = 0 \quad : F_h - T_h = 0, \text{ atau } F_h = T_h \qquad \text{(b)}$$

sedangkan dari syarat $\sum \tau = 0$, bila momen gaya dihitung terhadap titip P, hasilnya adalah

$$F_v(1\cos 30^0) - F_h(1\sin 30^0) - W\left(\frac{1\cos 30^0}{2}\right) = 0$$

Diperoleh

$$F_v = 0.577\, F_h + 30\ N \qquad \text{(c)}$$

Hubungan dalam persamaan (a), (b) dan (c) belum dapat diselesaikan, karena dari ke tiga persamaan tersebut terdapat empat variabel yang belum diketahui. Untuk menyelesaikannya tinjau hubungan antara komponen-komponen tegangan tali *T*,

$$T_v = T_h \tan \alpha$$

Karena

$$\tan \alpha = \frac{d - 1\sin 30^0}{1\cos 30^0} = \frac{2m - (3m)(0.5)}{(3m)(0.866)} = 0.192$$

maka $T_v = 0.192\ T_h$ (d)

bila (d) dimasukkan ke dalam (a) diperoleh

$$F_v = 100\ N - 0.192\ T_h \qquad \text{(e)}$$

Sedangkan (c) dapat dinyatakan dalam

$$F_v = 0.577\ T_h + 30N \qquad \text{(f)}$$

Dari penyelesaian persamaan (e) dan (f) diperoleh

$$T_h = 91\ N$$
$$F_v = 82.5\ N$$

Dan bila F_v dan T_h ini dimasukkan ke dalam (a) dan (b), diperoleh

$$T_v = 17.5\ N$$
$$F_h = 91\ N$$

Sehingga besar gaya tegangan tali adalah

$$T = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = 92.7N$$

Dan gaya penopang pada engsel adalah

$$F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = 122.83N$$

C. Titik Berat

Definisi dan Cara Menentukan Titik Berat

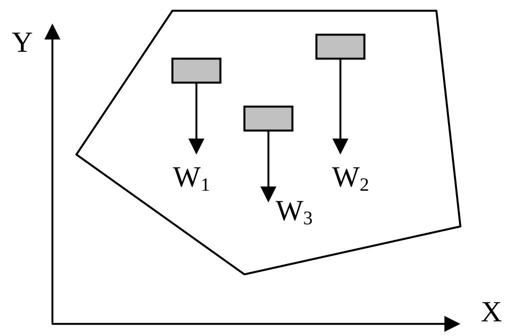
Titik berat dari suatu benda tegar adalah titik tunggal yang dilewati oleh resultan dari semua gaya berat dari partikel penyusun benda tegar tersebut. Titik berat disebut juga dengan pusat gravitasi.

Letak titik berat dari suatu benda secara kuantitatif dapat ditentukan dengan perhitungan sebagai berikut. Tinjau benda tegar tak beraturan terletak pada bidang XY seperti Gambar 3.5. Benda tersusun oleh sejumlah besar partikel dengan berat masing-masing w_1, w_2, w_3, berada pada koordinat (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3). Tiap partikel menyumbang torsi terhadap titik O sebagai poros yaitu w_1x_1, w_2x_2, w_3x_3. Torsi dari berat total benda W dengan absis X_G adalah WX_G, di mana torsi ini sama dengan jumlah torsi dari masing-masing partikel penyusun benda tegar. Dengan demikian kita dapat rumusan absis titik berat sebagai berikut:

$$X_G = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \ldots}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots} = \frac{\Sigma w_i x_i}{\Sigma w_i} \qquad (3.12)$$

dengan cara yang sama diperoleh ordinat titik berat sebagai berikut:

$$Y_G = \frac{w_1y_1 + w_2y_2 + w_3y_3 + \ldots}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots} = \frac{\Sigma w_i y_i}{\Sigma w_i} \qquad (3.13)$$



Gambar 3.6. Titik berat sejumlah partikel dari benda tegar

Keidentikan Titik Berat dan Pusat Massa

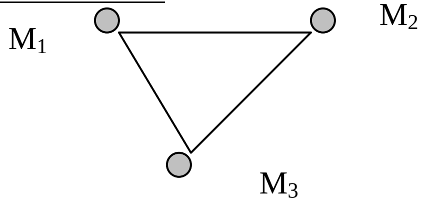
Gaya berat suatu benda tegar merupakan hasil kali antara massa benda dengan percepatan gravitasi (w = mg). Untuk itu apabila gaya berat benda w = mg disubstitusikan ke persamaan 3.12 dan 3.13 akan diperoleh *titik pusat massa* (X_G,Y_G) yang identik dengan titik berat.

$$X_G = \frac{m_1gx_1 + m_2gx_2 + m_3gx_3 + \ldots}{m_1g + m_2g + m_3g + \ldots} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} \qquad (3.14)$$

dan

$$Y_G = \frac{m_1gy_1 + m_2gy_2 + m_3gy_3 + \ldots}{m_1g + m_2g + m_3g + \ldots} = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i} \qquad (3.15)$$

<u>Contoh soal 3.8</u>.



Tiga massa M_1= 5 kg (4,4); M_2 = 10 kg (10,4) dan M_3 = 5 kg (6,0) membentuk sistem partikel benda tegar yang dihubungkan penghubung kaku seperti gambar. Tentukan titik berat dari sistem partikel tersebut.

Penyelesaian:
Dengan menggunakan persamaan 3.12 dan 3.13 diperoleh titik berat (X_G, Y_G) :

$$X_G = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + ...}{w_1 + w_2 + w_3 + ...} = \frac{\Sigma w_i x_i}{\Sigma w_i}$$

$$= \frac{5.4 + 10.10 + 5.6}{5 + 10 + 5} = \frac{150}{20} = 7{,}5$$

$$Y_G = \frac{w_1y_1 + w_2y_2 + w_3y_3 + ...}{w_1 + w_2 + w_3 + ...} = \frac{\Sigma w_i y_i}{\Sigma w_i} = \frac{5.4 + 10.4 + 5.0}{5 + 10 + 5} = \frac{60}{20} = 3$$

Kegiatan 4. Menentukan titik pusat massa

1. Ambil sebuah lembar kertas karton dengan ukuran 30 cm x 40 cm,
2. Timbang dan catat massa kertas karton tersebut,
3. Buat perpotongan garis diagonal,
4. Buat garis yang membagi kertas karton menjadi empat bagian yang sama,
5. Tempatkan acuan titik pusat (0,0) di titik perpotongan diagonal,
6. Secara teoritis tentukan titik pusat massa kertas karton dengan menggunakan empat luasan bagian kertas yang Anda buat,
7. Buktikan bahwa titik pusat massa kertas karton berada di titik perpotongan garis diagonal dengan cara ambil sebuah benang yang diikatkan pada sebarang titik pada kertas karton dan posisikan kertas menggantung dan setimbang,
8. Amati bahwa posisi benang akan segaris / melewati titik pusat massa yang berada di perpotongan diagonal.

Tugas 4.
Tentukan titik pusat massa dari selembar seng dengan bentuk sebarang dengan cara melakukan penyeimbangan dengan benang dan digantungkan sehingga posisi setimbang. Lakukan pada dua titik ikat benang berbeda posisi pada seng tersebut. Titik pusat massa ditentukan dengan melakukan perpotongan perpanjangan garis yang segaris dengan benang tersebut.

3.7 Rangkuman

1. Pemecahan masalah dinamika rotasi dilakukan dengan menggunakan Hukum II Newton translasi $\Sigma\vec{F} = ma$ dan rotasi $\Sigma\tau = I\alpha$.
2. Pemecahan masalah dinamika rotasi dapat juga dilakukan dengan menggunakan Hukum Kekekalan energi mekanik :
$$E_M\,(mekanik) = E_P\,(potensial) + E_K\,(translasi) + E_K\,(rotasi)$$
$$E_M = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$
3. Momen inersia adalah besaran yang merupakan hasil kali massa dengan kwadrat jarak massa terhadap sumbu rotasi, untuk system terdiri banyak partikel, momen inersianya adalah: $I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$.
4. Dalam dinamika rotasi terdapat besaran momentum sudut, dimana besarnya perubahan kecepatan momentum sudut yang terjadi sebanding dengan torsi yang bekerja pada benda yang berotasi. Jika selama berotasi resultan torsi pada benda sama dengan nol, maka pada benda berlako kekekalan momentum sudut, $L_o = L'$.
5. Kesetimbangan system partikel harus memenuhi syarat $\Sigma\vec{F} = 0$ yang meliputi $\Sigma F_x = 0$ dan $\Sigma F_y = 0$, sedang untuk kesetimbangan benda tegar harus memenuhi syarat resultan gaya harus nol, $\Sigma F = 0$ yang mencakup $\Sigma F_x = 0$ dan $\Sigma F_y = 0$ dan
Resultan torsi harus nol, $\Sigma\tau = 0$.

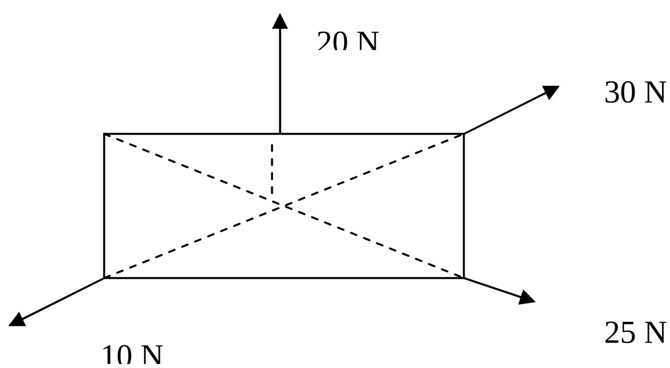
6. Titik berat suatu benda dapat dihitung dengan rumus :

$$X_G = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \ldots}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots} = \frac{\Sigma w_i x_i}{\Sigma w_i}$$

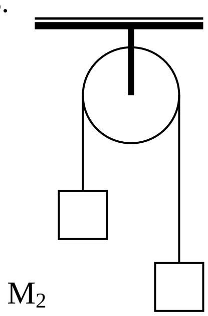
3.8 Soal Kompetensi

1. Pada sebuah roda yang mempunyai momen inersia 8 kg.m^2 dikenai torsi pada tepinya sebesar 50 m.N.
   (a). Berapakah percepatan sudutnya?
   (b). Berapakah lama waktu yang dibutuhkan roda dari diam sampai roda mempunyai kecepatan sudut 88,4 rad/s?
   (c). Berapakah besar energi kinetik roda tersebut pada kecepatan sudut 88,4 rad/s?

2. Tentukan torsi total dan arahnya terhadap poros O (perpotongan diagonal) dari persegi empat dengan ukuran20 cm x 40 cm berikut ini:



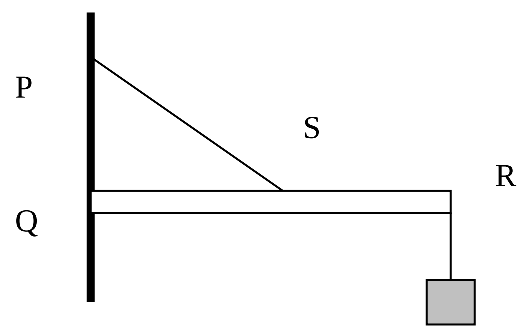
3. Balok M_1 = 2 kg, M_2 = 1 kg dihubungkan dengan tali melewati katrol berupa piringan tipis dengan massa katrol 1 kg dan radius 20 cm. Katrol dan tali tidak selip, system dilepas dari diam. Tentukan percepatan kedua balok dan energi kinetik katrol setelah bergerak dalam waktu 5 *s*.



M_1

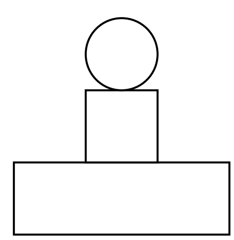
4. Seorang anak mengelindingkan pipa paralon dengan diameter 20 cm dan panjang 80 cm pada permukaan datar. Tentukan energi kinetik yang dimiliki paralon tersebut jika massa paralon 1,5 kg.

5. Dari system kesetimbangan berikut tentukan besar tegangan tali agar system dalam keadaan setimbang.



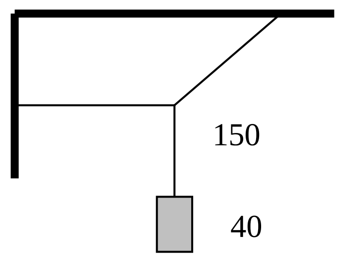
Batang QR = 120 cm dengan massa 4 kg, massa beban 10 kg dan sudut QPS = 45^o serta QS = 60 cm.

6. Seorang anak membuat model sebagai berikut:



Papan persegi 30 cm x 90 cm, papan bujur sangkar 30 cm x 30 cm dan papan lingkaran berdiameter 30 cm. Massa papan tersebut berturut-turut 4 kg, 3 kg dan 2 kg, tentukan titik berat model tersebut. Letakkan pusat koordinat di perpotongan diagonal papan bujur sangkar.

7. Dari sistem partikel berikut tentukan besarnya tegangan masing-masing tali.



8. Sebutkan syarat kesetimbangan (a). sistem partikel, (b). benda tegar.

9. Sebuah bola pejal dengan ragius 20 cm dan massa 4 kg dilepas dari keadaan diam di puncak bidang miring dengan ketinggian 60 cm dan sudut kemiringan 37^o terhadap horizontal. Tentukan percepatan linier dan energi kinetik dari bola ketika sampai di bidang datar dengan cara menggelinding. Selesaikan dengan menggunakan hukum kekekalan energi mekanik.

10. Tentukan momen inersia dari system partikel berikut m_1 = 2 kg (2,4); m_2 = 4 kg (4,-2); m_3 = 3 kg (3, 6), m_4 = 4 kg (0,-4) yang terhubung satu sama lain dengan penghubung kaku tak bermassa terhadap poros yang melewati pusat koordinat (0,0).